



www.SanjeshCloud.ir  
T.me/SanjeshClouds



دوره جمع‌بندی دوپینگ

یکشنبه

۱۴۰۴/۰۱/۱۰

دفترچه پاسخ

بانک سؤالات کنکور:

آمار و احتمال: فصل ۳ و ۴ آمار و احتمال + فصل ۲  
ریاضی دهم (صفحات ۱۵۲ تا ۱۷۰)  
هندسه: فصل ۳ یا دهم + فصل ۱ دهم

# دوپینگ‌ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی  
ریاضیات

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
ریاضیات	۲۳	۱	۲۳	۴۱ دقیقه

گسسته و هندسه	آمار و احتمال + هندسه	آمار و احتمال + هندسه	آمار و احتمال + هندسه	گسسته و هندسه	-	گسسته و هندسه
هفته اول	هفته سوم	هفته دوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم	هفته اول

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



سوالات کنکور: فصل ۳ آمار و احتمال

۱- نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است، مقدار  $\frac{Q_1 + Q_2 - 2Q_3}{Q_3 - Q_1}$  کدام است؟

$12/7, 30/2, 10/6, 11/9, 10/6, 12/3, 11/2, 13/5, 12/8, 11/5$

۰/۲۷۵ (۴)

۰/۱۷۵ (۳)

۰/۱۲۵ (۲)

۰/۲۲۵ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

نیمه اول:  $10/6, 10/6, 11/2, 11/5, 11/9$       نیمه دوم:  $12/3, 12/7, 12/8, 13/5, 30/2$

$Q_1 = 11/2$        $Q_2 = \frac{11/9 + 12/3}{2} = 12/1$        $Q_3 = 12/8$

$$\Rightarrow \frac{Q_1 + Q_2 - 2Q_3}{Q_3 - Q_1} = \frac{11/2 + 12/1 - (2 \times 12/8)}{12/8 - 11/2} = \frac{24 - 24/2}{12/8 - 11/2} = \frac{24 - 12}{12/8 - 11/2} = \frac{12}{12/8 - 11/2} = \frac{12}{12/8 - 44/8} = \frac{12}{-32/8} = \frac{12}{-4} = -3$$

گروه آموزشی ماز

۲- نمرات آمار ۵۰ دانش آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. اختلاف میانگین وزنی نمرات از میانه آن‌ها، کدام است؟

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۸
f	۶	۹	۱۰	۱۲	۸	۵

۰/۳۲ (۲)

۰/۲۸ (۱)

۰/۳۸ (۴)

۰/۳۶ (۳)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۴

میانهای داده آماری

برای محاسبه میانه تعدادی داده آماری کافی است داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم که در این صورت ۲ حالت پیش می‌آید.

(۱) اگر تعداد داده‌ها عددی فرد باشد، داده وسط، همان میانه (چارک دوم) است.

(۲) اگر تعداد داده‌ها عددی زوج باشد، میانگین دو داده وسط، میانه (چارک دوم) را نشان می‌دهد.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{(10 \times 6) + (12 \times 9) + (14 \times 10) + (15 \times 12) + (16 \times 8) + (18 \times 5)}{6 + 9 + 10 + 12 + 8 + 5} = \frac{706}{50} = 14.12$$

چون تعداد داده‌ها ۵۰ تا است، پس میانه داده‌ها برابر میانگین دو داده وسط (داده بیست و پنجم و داده بیست و ششم) است. حال با توجه به فراوانی‌های داده

شده می‌توان فهمید داده ۲۵ ام برابر ۱۴ و داده ۲۶ ام برابر ۱۵ خواهد بود. بنابراین میانه برابر با  $\frac{14+15}{2} = 14.5$  است.

$$14.5 - 14.12 = 0.38$$

حال اختلاف میانگین وزنی و میانه برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۳- میزان بارندگی یک استان در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است. در نمایش نمودار جعبه‌ای، ضریب تغییرات داده‌های داخل جعبه، کدام است؟

۵۹, ۳۹, ۵۶, ۴۶, ۵۰, ۵۴, ۳۷, ۴۲, ۵۷, ۳۲

۰/۰۹ (۲)

۰/۰۷ (۱)

۰/۱۵ (۴)

۰/۱۲ (۳)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۲

اگر  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  داده‌های ما باشند:

• میانگین:  $\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

• واریانس:  $\sigma^2 = \frac{(X_1 - \bar{x})^2 + (X_2 - \bar{x})^2 + \dots + (X_n - \bar{x})^2}{n}$

• ضریب تغییرات:  $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$



ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کرده و سپس چارک‌های اول و سوم را معین می‌کنیم:

$$32, 37, 39, 42, \quad 46, 50, \quad 54, 56, 57, 59$$

$Q_1$                        $Q_3 = \frac{46+50}{2} = 48$                        $Q_3$

پس داده‌های داخل جعبه، عبارت‌اند از: ۴۲، ۴۶، ۵۰، ۵۴

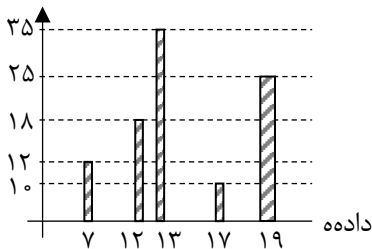
$$\bar{x} = \frac{42+46+50+54}{4} = 48$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{(42-48)^2 + (46-48)^2 + (50-48)^2 + (54-48)^2}{4}} = \sqrt{\frac{36+4+4+36}{4}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{5}}{48} = \frac{\sqrt{5}}{24} = 0.0931$$

◆ گروه آموزشی ماز ◆

فراوانی نسبی



۴- با توجه به نمودار میله‌ای فراوانی داده‌های کمی گسسته، میانگین کدام است؟

- ۱) ۱۳
- ۲) ۱۳/۸
- ۳) ۱۴
- ۴) ۱۴/۲

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۹۹)

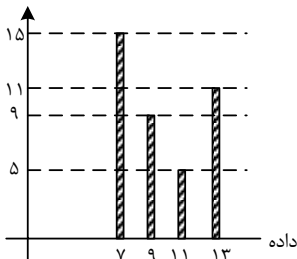
پاسخ: گزینه ۳ آزمون وی ای پی

نمودار داده شده مربوط به درصد فراوانی نسبی است. پس:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{(7 \times 12) + (12 \times 18) + (13 \times 35) + (17 \times 10) + (19 \times 25)}{100} = \frac{1400}{100} = 14$$

◆ گروه آموزشی ماز ◆

فراوانی



۵- با توجه به نمودار میله‌ای فراوانی داده‌های کمی گسسته، تفاضل میانه از میانگین، کدام است؟

- ۱) ۰/۳
- ۲) ۰/۴
- ۳) ۰/۵
- ۴) ۰/۶

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۴

داده‌ها را به صورت جدول زیر نمایش می‌دهیم:

داده	7	9	11	13
فراوانی	15	9	5	11

۴۰ = تعداد داده‌ها

همانطور که می‌دانید تعداد داده‌ها ۴۰ عدد است. پس میانه این ۴۰ داده میانگین داده‌های ۲۰ام و ۲۱ام است. از طرفی مطابق جدول فوق می‌توان فهمید که داده‌های ۲۰ام و ۲۱ام برابر ۹ هستند. پس:

$$\text{میانه} = Q_2 = \frac{9+9}{2} = 9$$

حال میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{(15 \times 7) + (9 \times 9) + (5 \times 11) + (11 \times 13)}{40} = 9/6$$

در نتیجه تفاضل میانه از میانگین برابر است با:

$$\bar{x} - Q_2 = 9/6 - 9 = 0/6$$

◆ گروه آموزشی ماز ◆



۶- در جدول فراوانی داده‌های زیر، مقدار میانه برابر  $13/5$  و اختلاف چارک اول از سوم  $17$  است. به هر یک از داده‌های جدول  $4$  واحد اضافه می‌کنیم.

واریانس جدول جدید، کدام است؟

داده	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۲۸	۳۱	a
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۲	۵	۱

- (۱)  $71$   
(۲)  $71/5$   
(۳)  $72$   
(۴)  $72/5$

(متوسط - محاسباتی -  $1103$ ) (کنکور داخل  $1400$ )

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} \quad \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

چون تعداد داده‌ها برابر با  $22$  است، پس میانه با میانگین دو داده وسط (داده  $11$ م و  $12$ م) برابر است. از طرفی طبق گفته سوال مقدار میانه برابر  $13/5$  است. بنابراین داده یازدهم و دوازدهم به ترتیب  $13$  و  $14$  می‌باشند.

از طرفی چارک اول (داده ششم) برابر  $13$  بوده و طبق فرض سوال، اختلاف چارک اول از چارک سوم برابر  $17$  است. با توجه به تعداد داده‌ها، چارک سوم برابر داده هفدهم یعنی یکی از داده‌های جدول است. پس:

$$\begin{cases} Q_1 = 13 \\ Q_3 - Q_1 = 17 \end{cases} \Rightarrow Q_3 = 30 \Rightarrow a = 30$$

حال اگر  $4$  واحد به هر یک از داده‌ها اضافه کنیم، واریانس داده‌ها تغییری نخواهد کرد. پس واریانس خواسته شده همان واریانس داده‌های جدول است. پس:

$$\bar{x} = \frac{(11 \times 3) + (12 \times 2) + (13 \times 6) + (14 \times 3) + (28 \times 2) + (31 \times 5) + (30 \times 1)}{22} = 19$$

$$\sigma^2 = \frac{3(11-19)^2 + 2(12-19)^2 + 6(13-19)^2 + 3(14-19)^2 + 2(28-19)^2 + 5(31-19)^2 + 1(30-19)^2}{22}$$

$$\sigma^2 = \frac{(3 \times 64) + (2 \times 49) + (6 \times 36) + (3 \times 25) + (2 \times 81) + (5 \times 144) + (1 \times 121)}{22} = \frac{1584}{22} = 72$$

گروه آموزشی ماز

۷- جدول فراوانی داده‌های زیر مفروض است. اگر مقدار میانه برابر  $13$  باشد، واریانس داده‌ها، کدام است؟ ( $a \geq 13$ )

داده	۸	۱۲	۱۳	۱۴	۲۶	۲۷	۲۸	a
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۱	۱	۵	۱

- (۱)  $54/86$   
(۲)  $55/03$   
(۳)  $55/36$   
(۴)  $55/63$

(دشوار - محاسباتی -  $1103$ ) (کنکور خارج  $1400$ )

پاسخ: گزینه ۳

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} \quad \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

چون تعداد داده‌ها برابر با  $22$  است، پس میانه، با میانگین دو داده وسط (داده یازدهم و دوازدهم) برابر است. از طرفی، میانه برابر با  $13$  است و با توجه به اینکه  $a \geq 13$  است، پس داده دوازدهم نیز برابر  $13$  است. بنابراین برای اینکه میانگین داده یازدهم و دوازدهم برابر  $13$  باشد،  $a$  باید داده دوازدهم و برابر  $13$  باشد.

داده	۸	۱۲	۱۳	۱۴	۲۶	۲۷	۲۸
فراوانی	۳	۲	۷	۳	۱	۱	۵

حال با توجه به جدول فوق، واریانس داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{(3 \times 8) + (2 \times 12) + (7 \times 13) + (3 \times 14) + (1 \times 26) + (1 \times 27) + (5 \times 28)}{22} = \frac{374}{22} = 17$$

$$\sigma^2 = \frac{3 \times (-9)^2 + 2 \times (-5)^2 + 7 \times (-4)^2 + 3 \times (-3)^2 + 1 \times 9^2 + 1 \times 10^2 + 5 \times 11^2}{22} = \frac{1218}{22} = 55/36$$

گروه آموزشی ماز



۸- اعداد ۹ تا ۱۹ در اختیار است. دو عدد دلخواه از بین این اعداد را حذف نموده و با مقدار اختلاف آن دو عدد جایگزین می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد زوج، غیر تکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند، انحراف معیار داده‌های جدید کدام است؟

$\sqrt{10}$  (۱)       $\sqrt{11}$  (۲)       $\sqrt{21}$  (۳)       $\sqrt{28}$  (۴)

(دشوار - محاسباتی - ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم که بیشترین اختلاف مربوط به ۹ و ۱۹ است که ۱۰ می‌شود. اما اعداد زوج از ۱۰ شروع می‌شوند، بنابراین، برای اینکه میانگین بیشترین مقدار ممکن باشد به اعداد زوج نباید دست زد و باید به همان طریقی که هستند در بین اعداد قرار داشته باشند.

$10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18$   
 $9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19$

اما برای اعداد فرد باید ۲ عدد را انتخاب کرد و با اختلاف آن‌ها جایگذاری کنیم. در این جا، چند نکته وجود دارد.

(۱) محل برداشتن و جایگذاری آن با اختلاف آن‌ها را فقط یک بار برای هر دو عدد انجام می‌دهیم. زیرا در غیر این صورت و با تکرار آن، بیشترین میانگین نقض می‌شود.

(۲) عدد فرد بزرگ‌تر باید دارای علامت مثبت و ۳ عدد فرد کوچک‌تر باید دارای علامت منفی باشند تا بیشترین مقدار میانگین حاصل گردد. مثلاً نمی‌توان ۲ عدد ۱۹ و ۱۵ را به عنوان یک جفت عدد انتخاب کرد، زیرا در این صورت، عدد ۱۵ دارای علامت منفی می‌شود.

$+19 - 15 = 4$   
 ↓      ↓  
 مثبت    منفی

(۳) به دلیل اینکه اعداد زوج تکراری به دست نیاید، تنها ۲ حالتی که می‌توان اعداد فرد باید به صورت جفت انتخاب کرد، طوری که میانگین بیشترین مقدار باشد، برابر هستند با:

$(19, 11) \quad (17, 13) \quad (15, 9)$   
 $8 + 4 + 6 = 18$   
 $(19, 13) \quad (17, 9) \quad (15, 11)$   
 $6 + 8 + 4 = 18$

حال، انحراف معیار اعداد ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸ را حساب می‌کنیم.

$$\bar{x} = 11 \quad \sigma^2 = \frac{[(4-11)^2 + (6-11)^2 + (8-11)^2 + (10-11)^2] \times 2}{8} = 21 \Rightarrow \sigma = \sqrt{21}$$

چون دنباله حسابی داشتیم از فرمول  $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} d^2$  نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

گروه آموزشی ماز

۹- میانگین دسته اول با ۴ داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است، به طوری که تنها داده متفاوت دو دسته داده a است. اگر واریانس دسته اول یک واحد بیشتر از دسته دوم باشد، انحراف معیار دسته اول کدام است؟

$2\sqrt{5}$  (۴)       $\sqrt{5}$  (۳)      ۲ (۲)      ۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  داده‌های آماری باشند:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

$$\frac{\sum x}{4} = \frac{\sum x+a}{5} \Rightarrow 5 \sum x = 4 \sum x + 4a$$

$$\sum x = 4a$$



$$\bar{x} = \frac{\sum a}{n} = a$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_1^2 + 1 \Rightarrow \frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + (x_3 - a)^2 + (x_4 - a)^2}{4} = \frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + (x_3 - a)^2 + (x_4 - a)^2 + (a - a)^2}{5} + 1$$

$$\frac{A}{4} = \frac{A}{5} + 1 \Rightarrow A = 20$$

$$\sigma_1^2 = \frac{A}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{5}$$

گروه آموزشی ماز

سوالات کنکور: فصل ۱ هندسه دهم

۱۰- مثلث  $ABC$  یک مثلث حاده الزویه است. عمود منصف ضلع  $BC$  و نیمساز زاویه  $B$  در نقطه  $M$  در خارج مثلث متقاطع اند. کدام گزینه درست است؟

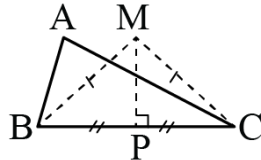
- (۱)  $\hat{A} > \hat{B}$  (۲)  $\hat{B} < \hat{A}$  (۳)  $\hat{B} > \hat{C}$  (۴)  $\hat{B} < \hat{C}$

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۳

چون نقطه  $M$  روی عمود منصف پاره خط  $BC$  قرار دارد. بنابراین از دو سر پاره خط به یک فاصله است. پس:

$$MC = MB \Rightarrow \hat{MBC} = \hat{MCB}$$



و چون  $BM$  نیمساز زاویه  $B$  است. لذا:  $\hat{MBC} = \hat{MCB} = \frac{\hat{B}}{2}$   
و از آن جایی که  $\hat{MCB} > \hat{ACB}$  است. پس:

$$\hat{MCB} > \hat{ACB} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} > \hat{C} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- در مثلث متساوی الساقین  $ABC$ ، نقطه  $M$  وسط ساق  $AB$  و عمود منصف آن، ساق  $AC$  را در نقطه  $N$  قطع می کند. اگر  $\hat{NBC} = 54^\circ$  باشد، اندازه زاویه

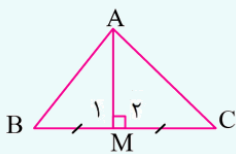
$\hat{MNB}$  چند درجه است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۶ (۳) ۶۶ (۴) ۷۸

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:



اگر  $MB = MC$  و  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$  باشد، آن گاه  $\hat{B} = \hat{C}$

$N$  روی عمود منصف  $AB$  است پس:

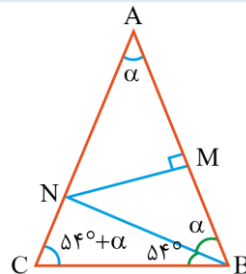
$\hat{ABC}$  در رأس  $A$  متساوی الساقین است، پس:  
مجموع زوایای داخلی مثلث  $180^\circ$  است، پس:

$$\hat{MAN} = \hat{MBN} = \alpha$$

$$\hat{ABC} = \hat{ACB}$$

$$54^\circ + \alpha + 54^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 72^\circ \Rightarrow \alpha = 24^\circ$$

$$\hat{MNB} = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$



گروه آموزشی ماز

۱۲- در مثلث متساوی الساقین  $ABC$ ،  $\hat{A} = 80^\circ$  و عمود منصف های دو ساق مثلث، قاعده  $BC$  را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع می کند. کوچک ترین زاویه مثلث

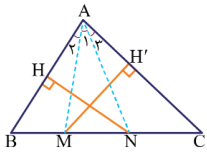
$AMN$  چند درجه است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰



(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۲



$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_3 = \hat{C} \text{ و } AM = MC$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 50^\circ$$

M روی عمود منصف AC قرار دارد، در نتیجه:

پس خواهیم داشت:

مطابق حالت قبل، N روی عمود منصف AB قرار دارد و  $\hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 50^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \underbrace{\hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3}_{80^\circ} = 100^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 20^\circ$$

گروه آموزشی ماز

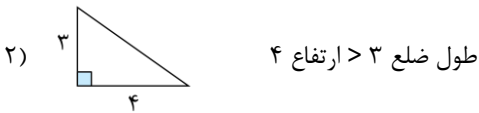
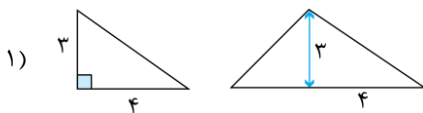
۱۳- برای کدام گزاره، نمی‌توان مثال نقض ارائه کرد؟

- (۱) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، همنهشت‌اند.
- (۲) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث، کوچک‌تر است.
- (۳) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آن‌ها نیز برابرند.
- (۴) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه از ۴ برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

(ساده - مفهومی - ۱۰۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

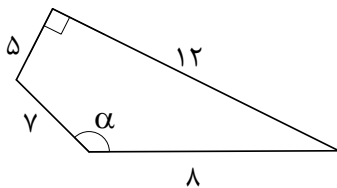
مثال نقض‌های گزینه‌های دیگر عبارتند از:



گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۳ هندسه یازدهم

۱۴- در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع عمود برهم‌اند.  $\sin \alpha$  کدام است؟



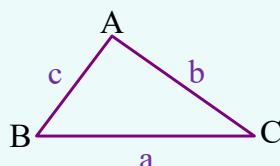
- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۲)  $\frac{3}{5}$
- (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۴)  $\frac{4}{5}$

(متوسط - مفهومی - ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۳

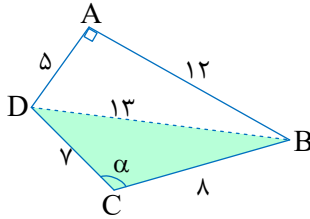
قضیه کسینوس‌ها

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$





ابتدا قطر DB را رسم می‌کنیم، حال مطابق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه DAB، اندازه وتر  $DB = 13$  به دست می‌آید. حال به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث DBC داریم:



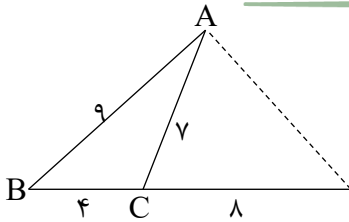
$$DB^2 = CD^2 + CB^2 - 2CD \cdot CB \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 13^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \times 7 \times 8 \times \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حواستون بود که  $\alpha = 120^\circ$  است؟

گروه آموزشی ماز



۱۵- در شکل روبه‌رو، اندازه پاره‌خط AD کدام است؟

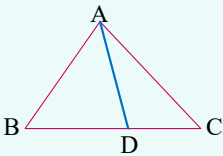
- (۱) ۹
- (۲)  $3\sqrt{10}$
- (۳) ۱۰
- (۴)  $6\sqrt{3}$

(متوسط - مفهومی - ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۱

قضیه استوارت

در مثلث ABC، اگر نقطه دلخواه D روی ضلع BC قرار داشته باشد، با توجه به این قضیه و رابطه زیر می‌توان طول پاره‌خط AD را به دست آورد.



$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

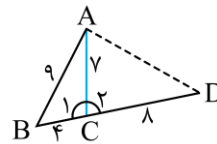
روش اول:

به کمک قضیه استوارت در مثلث ABD داریم:

$$AB^2 \times CD + AD^2 \times BC = AC^2 \times BD + BC \times CD \times BD$$

$$\Rightarrow (9^2 \times 8) + (AD^2 \times 12) = (7^2 \times 4) + (12 \times 8 \times 4)$$

$$\Rightarrow 4AD^2 = 324 \Rightarrow AD^2 = 81 \Rightarrow AD = 9$$



روش دوم:

قضیه کسینوس‌ها:

$$\hat{A}BC: AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC) \cos \hat{C}_1 \Rightarrow 81 = 49 + 16 - 2(7 \times 4) \cos \hat{C}_1$$

$$\Rightarrow 56 \cos \hat{C}_1 = -16 \Rightarrow \cos \hat{C}_1 = -\frac{2}{7}$$

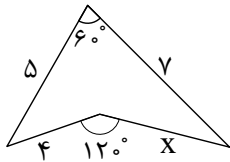
$$\cos \hat{C}_2 = \frac{2}{7}$$

می‌دانیم که اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو زاویه مکمل هم باشند:  $\cos \alpha = -\cos \beta$  است. پس:

$$\hat{A}CD: AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2(AC)(CD) \cos \hat{C}_2 \Rightarrow AD^2 = 49 + 64 - 2(7 \times 8) \times \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow AD^2 = 113 - 32 \Rightarrow AD^2 = 81 \Rightarrow AD = 9$$

گروه آموزشی ماز



(۲)  $2\sqrt{7}$   
(۴)  $3\sqrt{5}$

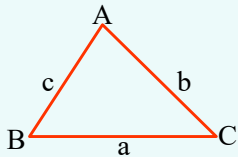
۱۶- در شکل زیر، مقدار  $(x+2)$ ، کدام است؟

(۱)  $3\sqrt{3}$   
(۳)  $4\sqrt{2}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۱

قضیه کسینوسها



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$

ابتدا مطابق شکل مقابل، از B به C وصل می‌کنیم و سپس براساس قضیه کسینوسها در دو مثلث ABC و BDC داریم:

$$\hat{A}BC : BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC) \cos 60^\circ$$

$$BC^2 = 25 + 49 - 2(5)(7) \times \frac{1}{2} \Rightarrow BC^2 = 74 - (35) = 39$$

$$\hat{B}DC : BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2(BD)(DC) \cos 120^\circ \Rightarrow 39 = 16 + x^2 - 2(4x) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 39 - 16 = x^2 + 4x \xrightarrow{+4} 27 = x^2 + 4x + 4$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 27 \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 3\sqrt{3} \\ x+2 = -3\sqrt{3} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- نیمساز داخلی زاویه A در مثلث ABC، ضلع مقابل را به پاره‌خطهای ۳/۵ و ۲/۵ واحدی تقسیم کرده است. اگر اندازه زاویه C برابر ۶۰ درجه باشد، ضلع کوچک‌تر مثلث چند واحد است؟

(۴) ۵/۲۵

(۳) ۴/۷۵

(۲) ۴/۲۵

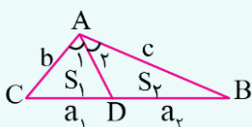
(۱) ۳/۷۵

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

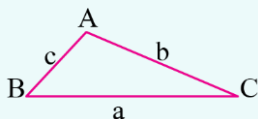
نکته ۱

اگر AD نیمساز  $\hat{A}$  باشد:



$$\frac{b}{c} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

نکته ۲



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

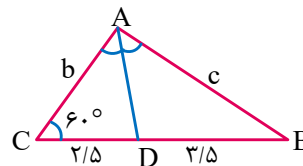
$$\text{قضیه نیمسازها: } \frac{b}{c} = \frac{25}{75} = \frac{5}{15} \Rightarrow \begin{cases} b = 5x \\ c = 15x \end{cases}$$

$$\text{قضیه کسینوسها: } c^2 = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)^2 + b^2 - 2 \times 6b \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 49x^2 = 36 + 25x^2 - 30x \Rightarrow 24x^2 + 30x - 36 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 6} 4x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 11}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$b = 5x = \frac{15}{4} = 3.75$$



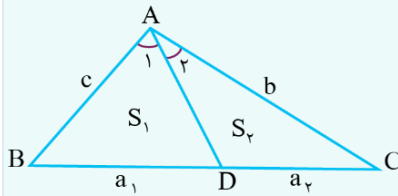


۱۸- اضلاع مثلثی با اعداد ۴، ۵ و ۶ متناسب است. نیمساز زاویه متوسط را رسم می کنیم. مساحت مثلث اصلی، چند برابر مساحت کوچک ترین مثلث حاصل از رسم این نیمساز است؟

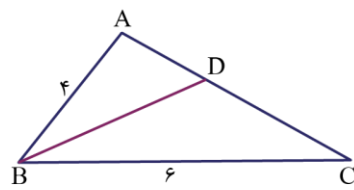
- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴) ۳

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$\text{اگر } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{S_2}{S_1}$$



$$\begin{aligned} \frac{AD}{DC} &= \frac{AB}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow \frac{AC}{AD} &= \frac{5}{2} \\ \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} &= \frac{AC}{AD} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

سوالات کنکور: فصل ۷ ریاضی دهم

۱۹- به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

- (۱)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{7}{15}$  (۴)  $\frac{8}{15}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۳

$$n(S) = 90 = \text{تعداد اعداد دو رقمی}$$

$$n(A) = \left[ \frac{99}{3} \right] - \left[ \frac{9}{3} \right] = 33 - 3 = 30 = \text{تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۳}$$

$$n(B) = \left[ \frac{99}{5} \right] - \left[ \frac{9}{5} \right] = 19 - 1 = 18 = \text{تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۵}$$

$$n(A \cap B) = \left[ \frac{99}{15} \right] - \left[ \frac{9}{15} \right] = 6 = \text{تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۳ و ۵}$$

می خواهیم حالتی را حساب کنیم که عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ باشد، پس:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 18 - 6 = 42$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- یک تاس سالم را سه بار به طور متوالی پرتاب می کنیم، احتمال رو شدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

- (۱)  $\frac{13}{36}$  (۲)  $\frac{41}{108}$  (۳)  $\frac{91}{216}$  (۴)  $\frac{31}{72}$

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۷) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۳

از اصل متمم استفاده می کنیم:

• تعداد کل حالتها:  $n(S) = 6^3 = 216$

• تعداد حالت هایی که در هیچ تاسی عدد ۶ ظاهر نشود:  $n(A') = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$$P(A) = 1 - \frac{n(A')}{n(S)} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

گروه آموزشی ماز



۲۱- دو تاس همگن را پرتاب می‌کنیم، با کدام احتمال، حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ است؟

- (۱)  $\frac{1}{18}$       (۲)  $\frac{1}{9}$       (۳)  $\frac{1}{6}$       (۴)  $\frac{1}{3}$

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

فضای نمونه پرتاب دو تاس  $n(S) = 36$

$$A = \{(3, 4), (4, 3), (1, 6), (6, 1)\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- در یک گروه ۱۵۰ نفری دانش آموزی، ۴۰ نفر فقط بلیت فیلم «الف» و ۷۵ نفر فقط بلیت فیلم «ب» را خریداری کرده‌اند. اگر  $P(A)$  و  $P(B)$  به ترتیب

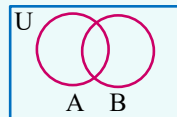
احتمال خرید بلیت فیلم‌های «الف» و «ب» باشند، بیشترین مقدار  $\frac{P(A)}{P(B)}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{15}{29}$       (۲)  $\frac{28}{45}$       (۳)  $\frac{8}{15}$       (۴)  $\frac{15}{22}$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

در هر مجموعه مرجعی مانند  $U$  همواره روابط زیر برقرارند:



۱)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

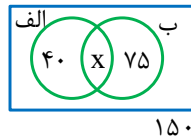
۲)  $\max(n(A \cup B)) = n(U)$

برای حل بهتر است از نمودار استفاده کنید:

$$40 + x + 75 \leq 150$$

$$x \leq 35 \Rightarrow x_{\max} = 35$$

$$\max\left(\frac{P(A)}{P(B)}\right) = \max\left(\frac{40+x}{75+x}\right)$$



این عبارت زمانی  $\max$  است که  $x$  بیشترین مقدار خود را داشته باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\max\left(\frac{P(A)}{P(B)}\right) = \frac{40+35}{75+35} = \frac{75}{110} = \frac{15}{22}$$

گروه آموزشی ماز

سوالات کنکور: فصل ۴ آمار و احتمال

۲۳- از اعداد ۰ تا  $N$ ، پنج عدد ۹، ۲، ۵، ۸ و ۱۱ به تصادف انتخاب شده‌اند. بر آورد نقطه‌ای  $N$  به کمک میانگین، کدام است؟

- (۱) ۱۰      (۲) ۱۲      (۳) ۱۴      (۴) ۱۶

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\bar{x} = \frac{\text{آخری} + \text{اولی}}{2}$$

میانگین اعدادی که دنباله حسابی تشکیل دهند:

میانگین اعداد ۰ تا  $N$  برابر  $\frac{N}{2}$  است و میانگین اعداد ۹، ۲، ۵، ۸ و ۱۱ برابر ۷ است.  $\frac{11+8+5+2+9}{5} = 7$

$$\frac{N}{2} = 7 \Rightarrow N = 14$$

گروه آموزشی ماز